E.N.S. ULM & SEVRES

Groupe A

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

Le but de ce problème est l'étude de certaines propriétés des solutions d'une équation différentielle du 2e ordre de la forme :

(1) $$y'' + p(x)\, y^{2n+1} = 0$$

où p est une fonction continue, strictement positive définie sur $]-\infty, +\infty[$ (éventuellement sur $]0, +\infty[$ dans un cas particulier) à valeurs dans $]0, +\infty[$ et n est un entier supérieur ou égal à 1.

On admettra dans tout le problème que, quels que soient les nombres réels (a, q, α), il existe une unique solution de l'équation (1), définie sur l'intervalle de définition de p, de classe C^2 vérifiant :

$$y(a) = q \quad \text{et} \quad y'(a) = \alpha$$

Les parties I, II, III *sont indépendantes.*

1984

I. Étude d'un cas particulier

Soit n un entier supérieur ou égal à 1 ($n \geqslant 1$).

On considère, sur l'intervalle $]0, +\infty[$, l'équation différentielle $(\bar{1})$

$$(\bar{1}) \qquad y'' + \frac{y^{2n+1}}{4\, x^{n+2}} = 0$$

1° Soit y une application de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, et soit u l'application de $]-\infty, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par la relation :

$$u(t) = y(e^t)\, e^{-\frac{t}{2}}$$

Montrez que y est une solution de classe C^2 de $(\bar{1})$ si et seulement si u est une solution de classe C^2 de l'équation (2) :

$$(2) \qquad 4u'' + u^{2n+1} - u = 0 \quad .$$

2° Montrez, en utilisant le préambule, que, quels que soient les réels (t_0, l, β) il existe une unique solution de l'équation (2) définie sur $]-\infty, +\infty[$, vérifiant $u(t_0) = l$ et $u'(t_0) = \beta$.

Déterminez la solution de l'équation (2) vérifiant pour t_0 donné dans $\mathbb{R}$ $u(t_0) = 0$ et $u'(t_0) = 0$.

3° Soit u une solution de classe C^2 de l'équation (2) définie sur $]-\infty, +\infty[$.

a. Montrez qu'il existe une constante K et un polynôme Q que l'on déterminera tels que, quel que soit t dans $\mathbb{R}$, on ait la relation :

$$4[u'(t)]^2 - Q(u(t)) = K.$$

b. Soit t_0 tel que $u'(t_0) \neq 0$.

En utilisant la relation précédente, construire une application G, de classe C^2, définie sur un voisinage U de $u(t_0)$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, telle que, pour tout t dans un voisinage J de t_0 vérifiant $u(J) \subset U$, on ait la relation :

$$G(u(t)) - G(u(t_0)) = \frac{t - t_0}{2}.$$

4° Dans toute cette question, on étudie une solution u_0 de l'équation (2) telle qu'il existe t_0 dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$u_0(t_0) > 0,\ u'_0(t_0) > 0,\quad 4[u'_0(t_0)]^2 + \frac{[u_0(t_0)]^{2n+2}}{n+1} - [u_0(t_0)]^2 = 0.$$

a. On pose $r = (n+1)^{1/(2n)}$

Étudiez la convergence des intégrales :

$$\int_{u_0(t_0)}^{r} [Q(u)]^{-1/2}\, du\ ;\ \int_0^r [Q(u)]^{-1/2}\, du\ ;\ \int_0^r \left([Q(u)]^{-1/2} - \frac{1}{u} \right) du$$

b. Montrez qu'il existe $t_1 > t_0$ tel que :

$$u_0(t_1) = r \quad \text{et} \quad u'_0(t_1) = 0$$

(On pourra raisonner par l'absurde en supposant que quel que soit $t > t_0$ $u_0(t) < r$; on montrera que, sous cette hypothèse, u est monotone et tend vers une limite finie quand t tend vers $+\infty$).

c. Comparez $u_0(t)$ et $u_0(2t_1 - t)$.

Calculez $\lim_{t \to +\infty} u_0(t)$ et $\lim_{t \to -\infty} u_0(t)$

d. Étudiez $\lim_{t \to +\infty} \left[\frac{t - t_1}{2} - \operatorname{Log} \frac{(n+1)^{1/(2n)}}{u_0(t)} \right]$

En déduire le comportement quand x tend vers $+\infty$ de la solution y_0 de l'équation $(\bar{1})$ associée à la solution u_0 de l'équation (2) étudiée dans cette question.

II. Étude de quelques propriétés élémentaires des solutions de l'équation (1)

1° *a.* Soient y_1 et y_2 deux solutions de l'équation (1) vérifiant sur un intervalle $[a, b]$ la relation :

$$y_1(x) \leqslant y_2(x)$$

On pose $\Phi(x) = y_2(x)\, y'_1(x) - y_1(x)\, y'_2(x)$

Montrez que Φ est une fonction de x de classe C^1 ; étudiez les variations de Φ sur $[a, b]$.

b. Soit y_2 une solution de (1) telle que :

$y_2(a) = y_2(b) = 0$ et $y_2(x) > 0$ sur $]a, b[$

Soit y_1 une solution telle que :

$y_1(a) = 0$ et $0 < y'_1(a) < y'_2(a)$

Montrez qu'il existe c dans l'intervalle $]a, b[$ tel que $y_1(c) = y_2(c)$.

2° Soit y une solution de (1); montrez que sur $]-\infty, +\infty[$, y vérifie l'équation intégrale :

$$y(x) = y(a) + y'(a).(x-a) + \int_a^x (t-x)\, p(t)\, y^{2n+1}(t)\, dt$$

III. Étude des solutions de (1) de signe constant au voisinage de $+\infty$

Dans toute cette partie on suppose que l'application p est définie continue strictement positive sur $]-\infty, +\infty[$.

1° Dans cette question, on fait l'hypothèse suivante :

Il existe un nombre réel a, et une solution y de (1) vérifiant

$$y(x) > 0 \quad \text{si} \quad x \geqslant a$$

a. Montrez que $y'(x) > 0$ si $x \geqslant a$ et étudiez $\lim_{x \to +\infty} y'(x)$.

b. Soit $b > a$ et x un point de l'intervalle $[a, b]$

Calculez en fonction de p :

$$\frac{y'(x)}{y^{2n+1}(x)} - \frac{y'(b)}{y^{2n+1}(b)} + (2n+1)\int_b^x \frac{[y'(s)]^2}{[y(s)]^{2n+2}}\, ds$$

En déduire la relation suivante :

$$\int_t^x p(s)\, ds \leqslant \frac{y'(t)}{y^{2n+1}(t)} \quad \text{si} \quad a \leqslant t \leqslant x \leqslant b$$

c. Trouvez un majorant de l'intégrale

$$\int_a^b (b-t)\, p(t)\, dt.$$

Quelle est la nature de l'intégrale $\int_a^{+\infty} p(t)\, dt$?

d. Montrez qu'une condition nécessaire pour que l'équation (1) admette une solution positive sur un intervalle $[a, +\infty[$ est que l'intégrale $\int_a^{+\infty} t\, p(t)\, dt$ soit convergente.

2° Réciproquement, soit p une application continue de $]-\infty, +\infty[$ dans $]0, +\infty[$ telle que l'intégrale $\int_a^{+\infty} t\, p(t)\, dt$ soit convergente. On étudie dans cette question l'équation (1) associée à cette application p.

a. Soit M un réel positif et z une application de classe C^2 d'un intervalle $]a, +\infty[$ dans $[0, M]$.

On définit sur l'intervalle $]a, +\infty[$ l'application z_1 par la relation :

$$z_1(x) = \int_x^{+\infty} (t-x)\, p(t)\, z(t)\, dt$$

Montrez, par un calcul explicite, que l'application z_1 est continue, deux fois dérivable sur $]a, +\infty[$. Calculez z''_1 en fonction de p et de z.

b. On définit, par récurrence une suite $\{y_m\}$ d'applications de $]-\infty, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$:

$$y_0(x) \equiv 0 \qquad y_{m+1}(x) = 1 - \int_x^{+\infty} (t-x)\, p(t)\, [y_m(t)]^{2n+1}\, dt$$

Montrez qu'il existe a indépendant de m tel que pour tout x dans l'intervalle $]a, +\infty[$ on ait :

$$0 \leqslant y_m(x) \leqslant 1$$

En déduire que la relation de récurrence précédente définit bien une suite d'application de classe C^2 de $]-\infty, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

c. Montrez que pour tout $x \geqslant a$:

$$|y_{m+1}(x) - y_m(x)|$$

$$\leqslant (2n+1)\left(\int_a^{+\infty} (t-a)\,p(t)\,dt\right)\left(\sup_{s \geqslant a} |y_m(s) - y_{m-1}(s)|\right)$$

En déduire qu'il existe un réel b ($b \geqslant a$) tel que la suite $\{y_m\}$ converge uniformément sur l'intervalle $[b, +\infty[$ vers une application $\bar{y}$ de $[b, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

Quelle est l'équation intégrale vérifiée par $\bar{y}$?

En déduire que $\bar{y}$ est solution sur $[b, +\infty[$ de l'équation (1). Calculez $\lim\limits_{x \to \infty} \bar{y}(x)$.

IV. Étude des solutions avec conditions aux limites sur un intervalle $[a, b]$

Dans cette partie, on se propose de démontrer que, quels que soient a et b, il existe une solution de l'équation (1) vérifiant $y(a) = y(b) = 0$ et $y(x) > 0$ si x est dans $]a, b[$.

1° On considère le cas particulier de l'équation différentielle $(\bar{1})$ étudiée dans la partie I $\left(\text{où } p \text{ est définie sur }]0, +\infty[\text{ et } p(x) = \dfrac{1}{4x^{n+2}}\right)$.

Les notations sont celles de la partie I (en particulier $r = (n+1)^{1/(2n)}$), et Q est le polynôme défini au I.3°.

a. Soit K un réel positif; montrez qu'il existe un unique élément noté $\varphi(K)$ de l'intervalle $]r, +\infty[$ tel que :

$$K = -Q[\varphi(K)]$$

Montrez que l'application φ ainsi définie est continue et calculez les limites suivantes :

$$\lim_{K \to +\infty} \varphi(K)\,; \quad \lim_{K \to +\infty} \frac{\varphi(K)}{\sqrt{K}}\,; \quad \lim_{K \to 0} \varphi(K)$$

Trouvez un équivalent de $\dfrac{\varphi(K)}{\sqrt{K}}$ lorsque K tend vers $+\infty$.

b. On pose :

$$I(K) = \int_0^{\varphi(K)} (K + Q(v))^{-\frac{1}{2}}\,dv$$

Montrez que I (K) est fini.

c. Soit $t_0 > 0$ donné et soit u_K la solution de l'équation (2) vérifiant :

$$u_K(t_0) = 0 \qquad 4\,[u'_K(t_0)]^2 = K \qquad u'_K(t_0) > 0$$

Montrez qu'il existe $t_1 > t_0$ tel que :

$$u'_K(t_1) = 0 \quad \text{et} \quad u'_K(t) > 0 \quad \text{si} \quad t \in]t_0, t_1[$$

Calculez $u_K(2t_1 - t_0)$

d. On pose $I(K) = I_1(K) + I_2(K)$ avec :

$$I_1(K) = \int_0^r (K + Q(v))^{-\frac{1}{2}}\,dv \qquad I_2(K) = \int_r^{\varphi(K)} (K + Q(v))^{-\frac{1}{2}}\,dv.$$

Montrez que l'on peut calculer I_2 en prenant comme nouvelle variable $w = Q(v)$.

En déduire que I (K) est une fonction continue de K sur $]0, +\infty[$

Calculez $\lim\limits_{K \to 0} I(K)$ et $\lim\limits_{K \to +\infty} I(K)$.

c. Montrez que, quels que soient a et b $0 < a < b$, il existe une solution y de l'équation (1) telle que :

$$y(a) = y(b) = 0 \quad \text{et} \quad y > 0 \quad \text{sur} \quad]a, b[$$

Dans les questions suivantes (2° à 6°) on étudie désormais l'équation générale (1) et on admettra le résultat suivant :

Soit a un réel donné; il existe une application Y, de classe C^1 de $]-\infty, +\infty[\times]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ deux fois dérivable par rapport à la première variable telle que :

i. $Y(a, q) = q$

ii. $\frac{\partial Y}{\partial x}(a, q) = 0$ $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right.$ désigne la dérivation par rapport à la première variable$\left.\right)$

iii. $\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}(x, q) = -p(x)\, Y(x, q)$

On posera $y_q(x) = Y(x, q)$

(y_q est la solution de l'équation (1) vérifiant les conditions initiales :

$$y_q(a) = q \qquad y'_q(a) = 0)$$

2° a. Montrez que pour chaque q strictement positif, il existe deux réels $c(q)$ et $d(q)$ tels que :

$$c(q) < a < d(q) \qquad y_q(c(q)) = y_q(d(q)) = 0$$

et $y_q(x) > 0$ si x est dans $]c(q), d(q)[$

Montrez que $\frac{\partial Y}{\partial x}(c(q), q) > 0$ et $\frac{\partial Y}{\partial x}(d(q), q) < 0$

b. On définit ainsi deux applications c et d de $]0, +\infty[$ respectivement dans $]-\infty, a[$ et $]a, +\infty[$

Montrez que c et d sont de classe C^1.

3° Montrez qu'il existe un point $x(q)$ unique

$$x(q) \in]a, d(q)[\quad \text{tel que} \quad Y(x(q), q) = \frac{q}{2}$$

On pose $m = \inf_{x \in [a-1, a+1]} p(x)$

et $\gamma(q) = m\left(\frac{q}{2}\right)^{2n+1}$

et soit q_0 tel que si $q \geqslant q_0$ $\gamma(q) \geqslant 1$.

On pose $Z(x, q) = q - \frac{\gamma(q)}{2}(x - a)^2$

a. Montrez que si $q \geqslant q_0$ et x est un point de $]a, x(q)[$ alors

$$0 < Y(x, q) < Z(x, q)$$

b. Montrez que $d(q) \leqslant 2x(q) - a$

En déduire : $\lim_{q \to \infty} d(q)$

4° Soit $b > a$; on pose

$$M(b) = \sup_{x \in [a, b]} p(x)$$

et $W(x, q, b) = q - \frac{M(b)\, q^{2n+1}}{2}(x - a)^2$

Comparez $W(x, q, b)$ et $Y(x, q)$ sur $[a, b]$

En déduire $\lim_{q \to 0} d(q)$.

5° Montrez que pour tout couple de réels (a, d) vérifiant $a < d$, il existe une solution u de (1) vérifiant :

$$u'(a) = 0, \quad u(d) = 0 \quad \text{et} \quad u > 0 \text{ sur } [a, d[$$

6° Montrez que pour tout couple de réels (c, d) vérifiant $c < d$, il existe une solution u de (1) vérifiant

$$u(c) = 0, \quad u(d) = 0 \quad \text{et} \quad u > 0 \text{ sur }]c, d[$$

7° Établir l'unicité de la solution de (1) définie à la question précédente dans les cas suivants :

i. $p(x) = 1$

ii. $p(x) = \dfrac{1}{4x^{\frac{3}{2}}}$

iii. $p(x)$ est une application de classe c^1 de $]-\infty, +\infty[$ dans $]0, +\infty[$ et $p'(x) \leqslant 0$ sur $[c, d]$.

(On pourra dans ce dernier cas montrer que $\dfrac{\partial Y}{\partial q}(d(q), q)$ est négatif).